

Aproximación exploratoria a la distribución orbital de algunos planetas del sistema solar mediante la proporción áurea.

Exploratory approach to the orbital distribution of selected solar system planets through the golden ratio.

Abordagem exploratória da distribuição orbital de alguns planetas do sistema solar por meio da proporção áurea.

Mario Pacheco Múgica
mario.pachecomugica@aviation.com.mx
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
México
Licenciatura
Aeropuertos / Estudios de Espacio Aéreo

Forma de citación en APA, séptima edición.

Pacheco Múgica, M. (2026). Aproximación exploratoria a la distribución orbital de algunos planetas del sistema solar mediante la proporción áurea. Revista IberoResearch, 1(3), 134–160.

Fecha de presentación: 21/01/2026

Fecha de aceptación: 15/02/2026

Fecha de publicación: 27/02/2026

Resumen

La presente investigación analizó la distribución orbital de algunos planetas del sistema solar mediante una secuencia basada en la proporción áurea, con el propósito de identificar si existía correspondencia entre los valores observados y los valores teóricos. Se desarrolló un estudio cuantitativo, exploratorio y descriptivo, con diseño no experimental y documental, usando como variables el perihelio, el afelio y la distancia media al Sol. Los resultados mostraron que el modelo áureo presentó ajustes parciales en algunos cuerpos, especialmente en la zona interna y en parte del sector externo cuando se aplicó una reindexación de nodos. Sin embargo, la comparación con la ley de Titius-Bode evidenció que esta última ofreció un mejor ajuste global en la mayoría de los casos analizados, sobre todo desde Venus hasta Urano. Se concluye que la proporción áurea puede funcionar como herramienta matemática de análisis comparativo, pero no como una ley universal de organización planetaria. Su principal valor radica en abrir una vía exploratoria para estudiar regularidades orbitales y contrastarlas con otros modelos astronómicos.

Palabras clave: Serie de Fibonacci; ley de Titius-Bode; semeje mayor; perihelio; afelio; arquitectura planetaria.

Abstract

This study analyzed the orbital distribution of selected planets in the solar system through a sequence based on the golden ratio, with the aim of identifying whether a correspondence existed between observed and theoretical values. A quantitative, exploratory, and descriptive study was carried out under a non-experimental and documentary design, using perihelion, aphelion, and mean solar distance as variables. The results showed that the golden-ratio model provided partial fits for some bodies, especially in the inner region and in part of the outer sector when node reindexing was applied. However, comparison with the Titius-Bode law showed that the latter offered a better overall fit in most of the analyzed cases, particularly from Venus to Uranus. It is concluded that the golden ratio may serve as a mathematical tool for comparative analysis, but not as a universal law of planetary organization. Its main value lies in opening an exploratory path for studying orbital regularities and contrasting them with other astronomical models.

Keywords: Fibonacci sequence; Titius-Bode law; semimajor axis; perihelion; aphelion; planetary architecture.

Resumo

A presente pesquisa analisou a distribuição orbital de alguns planetas do sistema solar por meio de uma sequência baseada na proporção áurea, com o objetivo de identificar se existia correspondência entre os valores observados e os valores teóricos. Foi realizado um estudo quantitativo, exploratório e descritivo, com desenho não experimental e documental, utilizando como variáveis o periélio, o afélio e a distância média ao Sol. Os resultados mostraram que o modelo áureo apresentou ajustes parciais em alguns corpos, especialmente na zona interna e em parte do setor externo quando foi aplicada uma reindexação dos nós. No entanto, a comparação com a lei de Titius-Bode evidenciou que esta última ofereceu melhor ajuste global na maioria dos casos analisados, sobretudo de Vênus a Urano. Conclui-se que a proporção áurea pode funcionar como ferramenta matemática de análise comparativa, mas não como uma lei universal de organização planetária. Seu principal valor está em abrir um caminho exploratório para o estudo de regularidades orbitais e sua comparação com outros modelos astronômicos.

Palavras-chave: sequência de Fibonacci; lei de Titius-Bode; semieixo maior; periélio; afélio; arquitetura planetária.

Introducción

El sistema solar ha sido estudiado durante siglos, porque su organización despierta preguntas sobre el orden del universo, entre esas preguntas destaca la forma en que se distribuyen los planetas alrededor del Sol, ya que sus distancias no parecen estar puestas al azar, este trabajo parte de esa inquietud y busca observar si existe una regularidad matemática en esa distribución.

Desde hace mucho tiempo, astrónomos y matemáticos intentaron encontrar una regla que explicara las distancias planetarias, una de las propuestas más conocidas fue la ley de Titius Bode, la cual planteó una secuencia numérica para aproximar la posición de varios planetas, aunque esa propuesta tuvo cierto valor histórico, también mostró límites y dejó dudas importantes.

El problema de investigación nace precisamente de esas dudas, porque si bien algunas distancias parecen ajustarse a ciertos patrones, otras no encajan de manera clara, esto genera una pregunta central sobre si la distribución planetaria responde a una relación matemática más amplia, o si las coincidencias observadas son solo aproximaciones parciales sin valor explicativo general.

En este contexto, la proporción áurea aparece como una posibilidad de análisis, debido a que ha sido relacionada con formas de crecimiento, equilibrio y organización en diferentes ámbitos, su presencia en varias expresiones matemáticas y geométricas ha despertado interés en muchas disciplinas, por eso resulta pertinente explorar si también puede ofrecer una lectura útil de algunas órbitas planetarias.

La proporción áurea puede entenderse como una relación numérica especial entre dos magnitudes, en la que el todo y una de sus partes guardan la misma razón, esta relación ha sido valorada por su armonía y por su repetición en distintos modelos teóricos, dentro

de este estudio no se asume como verdad absoluta, sino como una herramienta de observación y comparación.

Junto con la proporción áurea, también se considera la serie de Fibonacci, porque ambas guardan una relación matemática conocida, a medida que la secuencia avanza, la razón entre sus términos se acerca progresivamente al valor áureo, esta conexión permite construir una base teórica simple para revisar si las distancias orbitales muestran alguna cercanía con una sucesión de ese tipo.

Los antecedentes de este tema muestran que no es nuevo intentar describir el sistema solar mediante regularidades numéricas, a lo largo del tiempo surgieron propuestas que buscaron ordenar las órbitas a partir de fórmulas, escalas y comparaciones geométricas, algunas tuvieron aceptación temporal, otras fueron cuestionadas, pero todas dejaron abierta la discusión sobre el orden matemático del espacio planetario.

El contexto del estudio también es importante, porque en la astronomía moderna las órbitas se explican sobre todo por procesos físicos, dinámicos y gravitacionales, sin embargo, el análisis matemático de patrones sigue siendo valioso como apoyo interpretativo, especialmente cuando ayuda a comparar datos observados con modelos teóricos, sin confundir una aproximación descriptiva con una ley definitiva.

La relevancia de esta investigación se encuentra en que permite revisar un problema clásico desde una perspectiva distinta, combinando historia de la astronomía, matemáticas y análisis comparativo, además, el tema tiene valor académico y didáctico, porque facilita explicar cómo una idea puede ser sugerente desde el punto de vista numérico, pero necesita contraste riguroso para sostenerse científicamente.

El objetivo general de este trabajo es analizar la distribución orbital de algunos planetas del sistema solar mediante una secuencia basada en la proporción áurea, con el fin de identificar si existe una correspondencia aproximada entre los valores observados y los

valores calculados, a partir de ello se busca valorar el alcance explicativo de este enfoque dentro de un marco exploratorio.

De manera específica, se propone comparar las distancias reales de los planetas con los valores obtenidos por la secuencia áurea, contrastar esos resultados con la ley de Titius Bode, examinar perihelio, afelio y distancia media como referencias de análisis, y reconocer qué casos presentan mayor cercanía o mayor desviación, para así construir una evaluación más ordenada del comportamiento orbital estudiado.

La hipótesis de trabajo plantea que algunas distancias planetarias podrían mostrar una aproximación parcial a una distribución asociada con la proporción áurea, aunque ese ajuste no sería uniforme ni suficiente para afirmar una ley universal, desde esta idea, la introducción abre el camino para presentar la metodología, los resultados y la discusión de un estudio que busca interpretar con prudencia, lo que los números parecen sugerir.

Metodología

La investigación se desarrollará con un enfoque cuantitativo, porque trabaja con distancias orbitales expresadas en valores numéricos y con comparaciones entre datos observados y calculados, el estudio busca identificar si existe una aproximación entre ciertas órbitas planetarias y una secuencia basada en la proporción áurea, sin presentar el modelo como una ley física definitiva, ;Creswell (2023) explica que el enfoque metodológico debe elegirse según la naturaleza de los datos y la pregunta de investigación.

El diseño del estudio será no experimental, observacional, documental y de corte transversal, no se manipulará ninguna variable porque las órbitas planetarias ya existen y solo serán analizadas mediante registros astronómicos disponibles, el análisis se realizará en un único momento utilizando una base de datos organizada para su comparación,

;Capili (2021) señala que los estudios observacionales y transversales permiten analizar fenómenos sin intervenir directamente en ellos.

La población teórica del estudio está formada por los planetas del sistema solar, sin embargo la muestra analítica incluirá únicamente a los ocho planetas reconocidos actualmente desde Mercurio hasta Neptuno, Plutón se considerará solo como referencia histórica y el llamado Planeta X se tratará como una proyección matemática, ;McInerney et al. (2024) indican que un diseño de investigación debe delimitar claramente los casos incluidos en el análisis.

Los datos utilizados en la investigación se obtendrán de efemérides y bases de datos astronómicas reconocidas, se dará prioridad a la información proveniente de JPL Horizons y otras fuentes equivalentes que reporten parámetros orbitales consistentes, para cada planeta se registrarán el perihelio, el afelio y la distancia media al Sol, ;Moiseev y Emelyanov (2024) explican que las efemérides planetarias modernas constituyen referencias confiables para estudios comparativos en astronomía.

Las variables principales del estudio serán el perihelio, el afelio y la distancia media orbital de cada planeta, estas medidas permiten describir de forma clara la posición de los planetas respecto al Sol y facilitan la comparación entre órbitas, cuando sea necesario verificar los datos se contrastará la distancia media con el promedio entre perihelio y afelio, ;Hughes (2024) describe la relación geométrica entre estas magnitudes orbitales.

El procedimiento de análisis se realizará en varias etapas, primero se recopilarán y organizarán los datos reales de cada planeta, luego se construirá una secuencia teórica basada en la proporción áurea y otra basada en la ley de Titius-Bode, posteriormente se calcularán diferencias entre los valores observados y estimados, ;Wünsch et al. (2025) recomiendan reportar tanto los aciertos como los desajustes en estudios comparativos.

El procesamiento de los datos podrá realizarse en Excel o en Python según la disponibilidad durante el desarrollo del estudio, se utilizarán tablas y gráficos simples para mostrar la comparación entre valores reales y teóricos, además se conservará un registro claro del procedimiento para permitir su revisión y repetición, ;Danchev (2022) destaca la importancia de los flujos de trabajo reproducibles en el análisis de datos.

El estudio no requiere consideraciones éticas relacionadas con seres humanos o animales, ya que utiliza únicamente datos astronómicos públicos, aun así se mantendrá un manejo responsable de la información indicando claramente el origen de los datos y las limitaciones del modelo utilizado, ;Zelenka et al. (2025) señalan que los proyectos basados en datos también deben considerar buenas prácticas éticas en el uso de la información.

Resultados y Discusión

Los resultados se organizaron en una secuencia comparativa que parte de los parámetros orbitales observados y avanza hacia dos modelos de ajuste, uno construido con una secuencia áurea de base terrestre y otro derivado de la regla clásica de Titius-Bode. El análisis se concentró en semieje mayor, perihelio, afelio, espaciamento relativo y error agregado, porque esas variables permiten distinguir entre parecido visual y ajuste cuantitativo real.

La discusión se integró dentro de la misma sección para no separar los números de su interpretación, ya que en este estudio no bastaba con presentar tablas llamativas y esperar que el lector se rinda ante ellas. Por eso, cada bloque combina una matriz de resultados con una lectura crítica del patrón hallado, especialmente en la transición entre el sistema interno, la región de Ceres y el sector trans-saturnino.

La primera tabla establece la base observacional del estudio, a partir de semieje mayor y excentricidad se derivaron perihelio, afelio, amplitud orbital, semieje menor, desplazamiento focal y varios índices geométricos. Esta matriz no es decorativa, porque define el espesor real de cada órbita y permite juzgar después si un modelo teórico cae dentro de una banda razonable o si queda muy lejos del comportamiento orbital observado.

Tabla 1
Matriz orbital observada y descriptores geométricos derivados

Cuerpo	q, perihelio (10 ⁶ km)	a, distancia media (10 ⁶ km)	Q, afelio (10 ⁶ km)	$\Delta = Q - q$	e	b, semieje menor (10 ⁶ km)	c = ae (10 ⁶ km)	Q/q	Δ/a (%)	Cierre geométrico (%)
Mercurio	46.00	57.91	69.82	23.82	0.21	56.67	11.91	1.52	41.13	0.0000
Venus	107.48	108.21	108.94	1.47	0.01	108.21	0.73	1.01	1.36	0.0000
Tierra	147.10	149.60	152.10	5.00	0.02	149.58	2.50	1.03	3.34	0.0000
Marte	206.66	227.94	249.23	42.58	0.09	226.95	21.29	1.21	18.68	0.0000
Ceres	381.48	413.76	446.03	64.55	0.08	412.50	32.27	1.17	15.60	0.0000
Júpiter	740.67	778.34	816.01	75.34	0.05	777.43	37.67	1.10	9.68	0.0000
Saturno	1349.81	1426.71	1503.61	153.80	0.05	1424.64	76.90	1.11	10.78	-0.0000
Urano	2734.97	2870.63	3006.30	271.33	0.05	2867.43	135.67	1.10	9.45	0.0000
Neptuno	4459.75	4498.39	4537.03	77.28	0.01	4498.23	38.64	1.02	1.72	0.0000
Plutón	4436.74	5906.44	7376.14	2939.40	0.25	5720.66	1469.70	1.66	49.77	0.0000

Nota. Elaboración propia a partir de semieje mayor y excentricidad orbital. El cierre geométrico compara $(q+Q)/2(q+Q)/2(q+Q)/2$ con aaa, por eso su valor cercano a cero funciona como control interno del cálculo. Los datos base de aaa y eee proceden de tablas astronómicas de referencia para planetas y cuerpos menores.

La tabla confirma que el sistema no puede leerse como una fila de puntos rígidos, sino como un conjunto de órbitas con espesores muy distintos. Venus, Tierra y Neptuno muestran bandas estrechas, mientras que Mercurio y Plutón exhiben aperturas orbitales mucho más amplias, lo que cambia por completo el criterio con el que debe juzgarse un ajuste teórico.

El índice Δ/a deja ver un contraste estructural fuerte entre las órbitas casi circulares y las más excéntricas. En Venus el recorrido radial relativo apenas supera 1%, mientras que en Plutón roza 50%, de modo que una misma desviación absoluta no tiene el mismo peso geométrico en ambos casos.

El cociente Q/q también sirve para separar regímenes orbitales. Los valores cercanos a 1 en Venus, Tierra y Neptuno indican trayectorias muy compactas, mientras que Mercurio y sobre todo Plutón se apartan con claridad y obligan a interpretar sus posiciones medias con más cautela.

Desde el punto de vista geométrico, Ceres cumple un papel de bisagra, no pertenece al grupo interno clásico, pero tampoco comparte la enorme apertura de Plutón, por lo que su comportamiento ayuda a probar si un modelo funciona solo en el sistema interior o si puede mantener continuidad al cruzar el cinturón principal.

El valor de b , semieje menor, muestra que muchas órbitas conservan forma bastante compacta aunque la escala radial crezca de manera considerable, esa observación es importante porque evita confundir distancia media grande con irregularidad geométrica alta, error bastante común cuando alguien mira una tabla astronómica y decide improvisar metafísica.

En conjunto, la tabla observacional sugiere que cualquier modelo de distribución tendrá que enfrentar un sistema heterogéneo, con zonas muy ordenadas y otras más dispersas. Esa heterogeneidad justifica que el análisis posterior utilice errores relativos, errores agregados y normalizaciones por media amplitud orbital, en lugar de quedarse solo con diferencias absolutas.

La segunda tabla aplica el modelo áureo fijo, construido con una base de un tercio de la distancia media terrestre y una asignación de nodos según la secuencia 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 y 89. El objetivo no fue forzar una coincidencia estética, sino medir con la

misma vara el residuo frente a perihelio, distancia media y afelio, además de un índice de distancia normalizada respecto del semiancho orbital.

Tabla 2
Ajuste del modelo áureo fijo

Cuerpo	Nodo Fibonacci	Distancia teórica (AU)	Distancia teórica (10 ⁶ km)	Residuo en a (10 ⁶ km)	Error vs q (%)	Error vs a (%)	Error vs Q (%)	NHD = residuo /(Δ/2)	MAPE3 (%)
Mercurio	1	0.33	49.87	-8.04	8.40	-13.89	-28.58	0.68	16.96
Venus	2	0.67	99.73	-8.48	-7.21	-7.83	-8.46	11.56	7.83
Tierra	3	1.00	149.60	-0.00	1.70	-0.00	-1.64	0.00	1.11
Marte	5	1.67	249.33	21.39	20.65	9.38	0.04	1.00	10.02
Ceres	8	2.67	398.93	-14.83	4.57	-3.58	-10.56	0.46	6.24
Júpiter	13	4.33	648.26	-130.09	-12.48	-16.71	-20.56	3.45	16.58
Saturno	21	7.00	1047.19	-379.53	-22.42	-26.60	-30.36	4.94	26.46
Urano	34	11.33	1695.44	-1175.19	-38.01	-40.94	-43.60	8.66	40.85
Neptuno	55	18.33	2742.63	-1755.77	-38.50	-39.03	-39.55	45.44	39.03
Plutón	89	29.67	4438.07	-1468.37	0.03	-24.86	-39.83	1.00	21.57

Nota. Elaboración propia. MAPE3 corresponde al promedio del valor absoluto del error relativo respecto de perihelio, distancia media y afelio. NHD expresa cuántas medias amplitudes orbitales separan al modelo de la distancia media observada. Los parámetros de partida proceden de efemérides y compendios orbitales de referencia.

El modelo áureo fijo muestra su mejor comportamiento en la franja terrestre. Tierra queda prácticamente anclada al nodo teórico, Venus mantiene un error moderado y Marte conserva una proximidad aceptable si se mira el afelio, aunque ya empieza a mostrar una sobreestimación apreciable en la distancia media.

Mercurio aparece como un caso ambiguo, el residuo absoluto no es enorme en términos de escala general, pero la excentricidad del planeta ensancha la órbita lo suficiente como para que el nodo áureo siga siendo verosímil solo de manera parcial y no como coincidencia robusta.

Ceres conserva un ajuste relativamente bueno y eso es importante, porque evita que el modelo se rompa justo al cruzar la región interna. Sin embargo, la mejora no continúa en

Júpiter y desde ahí comienza una subestimación acumulativa que se vuelve severa en Saturno, Urano y Neptuno.

El índice NHD revela algo que el error porcentual por sí solo no muestra con claridad, en Venus, una diferencia absoluta pequeña se vuelve muy costosa al normalizarla por el espesor orbital, mientras que en Plutón un residuo grande queda relativamente amortiguado por la amplitud extrema de su órbita.

El deterioro del modelo desde Júpiter hasta Neptuno sugiere que la secuencia áurea rígida no escala bien hacia el sistema externo cuando se obliga a mantener continuidad de nodos sin vacíos intermedios, en otras palabras, el patrón funciona mejor como descriptor parcial que como ley única, por mucho que a los humanos les encanten los números con aura mística.

Plutón, en cambio, muestra una rareza interesante porque el nodo 89 cae muy cerca del perihelio pero lejos de la distancia media y todavía más del afelio, eso indica que el “buen ajuste” plutoniano del modelo fijo no es global, sino localizado en una parte de la órbita, por lo que no conviene venderlo como victoria completa del esquema áureo.

La tercera tabla somete los mismos cuerpos al patrón de Titius-Bode, usando la secuencia clásica 0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, 10, 19.6, 38.8 y 77.2 AU, aquí el interés no es histórico solamente, sino comparativo, porque esta regla empírica ha sido durante siglos el punto de referencia obligado para cualquier intento de describir regularidades en las distancias planetarias.

Tabla 3
Ajuste del modelo de Titius-Bode

Cuerpo	Distancia teórica (AU)	Distancia teórica (10 ⁶ km)	Residuo en a (10 ⁶ km)	Error vs q (%)	Error vs a (%)	Error vs Q (%)	NHD = residuo /(Δ/2)	MAPE3 (%)
Mercurio	0.4	59.84	1.93	30.08	3.33	-14.29	0.16	15.90
Venus	0.7	104.72	-3.49	-2.57	-3.23	-3.88	4.76	3.22
Tierra	1.0	149.60	-0.00	1.70	-0.00	-1.64	0.00	1.11
Marte	1.6	239.36	11.41	15.82	5.01	-3.96	0.54	8.26
Ceres	2.8	418.87	5.12	9.80	1.24	-6.09	0.16	5.71
Júpiter	5.2	777.91	-0.43	5.03	-0.06	-4.67	0.01	3.25
Saturno	10.0	1495.98	69.26	10.83	4.85	-0.51	0.90	5.40
Urano	19.6	2932.12	61.48	7.21	2.14	-2.47	0.45	3.94
Neptuno	38.8	5804.40	1306.00	30.15	29.03	27.93	33.80	29.04
Plutón	77.2	11549.00	5642.52	160.30	95.53	56.57	3.84	104.14

Nota. Elaboración propia. Se mantuvo el mismo esquema de error y normalización empleado en la tabla 2, con el fin de preservar comparabilidad directa entre modelos. Los valores orbitales observados se calcularon desde semieje mayor y excentricidad reportados en tablas astronómicas de referencia.

La primera diferencia visible es que Titius-Bode reduce con fuerza el error agregado desde Venus hasta Urano, el caso de Júpiter es particularmente sólido, porque el residuo en distancia media es casi nulo y el NHD cae prácticamente a cero, lo que indica que la predicción se ubica muy cerca del centro orbital observado.

Mercurio sigue siendo incómodo también para este modelo, el error frente al perihelio es alto, pero la cercanía al semieje mayor le da al patrón una apariencia aceptable en términos globales, de modo que la regla clásica tampoco resuelve de manera perfecta el extremo interno del sistema.

Venus, Tierra y Marte forman un bloque donde la secuencia clásica se comporta mejor que la áurea fija, no es una victoria aplastante en todos los casos, pero sí una mejora sistemática que sugiere mayor estabilidad del patrón en la zona interior tradicional.

Ceres vuelve a desempeñar un papel importante, porque la regla clásica conserva en él un error contenido, esa continuidad desde Marte hasta el cinturón principal explica por qué Titius-Bode ha mantenido relevancia histórica como regla descriptiva, aunque no alcance categoría de ley dinámica universal.

El modelo se rompe con claridad en Neptuno y colapsa en Plutón, ahí desaparece la sensación de continuidad y aparecen sobreestimaciones muy grandes, lo que indica que el crecimiento clásico de los nodos se expande demasiado rápido en el borde exterior del conjunto analizado.

Este comportamiento escalonado hace razonable interpretar a Titius-Bode como una regla empírica de alcance parcial, funciona bien en una porción amplia del sistema, pero su potencia cae de forma abrupta en la periferia, justo donde también se complica la dinámica de resonancias, dispersión y cuerpos transneptunianos.

La cuarta tabla sintetiza la competencia entre ambos enfoques mediante un índice comparativo de error, esta vista integrada es necesaria porque discutir planeta por planeta puede ser útil, pero también sirve para que cualquiera escoja a mano el caso que más le conviene y declare victoria, deporte académico tristemente popular.

Tabla 4

Comparación integrada de error entre modelos

Cuerpo	MAPE3 áureo (%)	MAPE3 Titius-Bode (%)	Δ MAPE (pp)	ICM = MAPE áureo / MAPE TB	Mejor ajuste	Ventaja del mejor (%)
Mercurio	16.96	15.90	1.05	1.07	Titius-Bode	6.21
Venus	7.83	3.22	4.61	2.43	Titius-Bode	58.84
Tierra	1.11	1.11	0.00	1.00	Titius-Bode	0.00
Marte	10.02	8.26	1.76	1.21	Titius-Bode	17.55
Ceres	6.24	5.71	0.53	1.09	Titius-Bode	8.50

Cuerpo	MAPE3 áureo (%)	MAPE3 Titius-Bode (%)	Δ MAPE (pp)	ICM = MAPE áureo / MAPE TB	Mejor ajuste	Ventaja del mejor (%)
Júpiter	16.58	3.25	13.33	5.10	Titius-Bode	80.40
Saturno	26.46	5.40	21.06	4.90	Titius-Bode	79.60
Urano	40.85	3.94	36.91	10.37	Titius-Bode	90.36
Neptuno	39.03	29.04	9.99	1.34	Titius-Bode	25.59
Plutón	21.57	104.14	-82.56	0.21	Áureo	79.28

Nota. Elaboración propia. El índice ICM mayor que 1 favorece a Titius-Bode, mientras que un valor menor que 1 favorece al modelo áureo. El uso de un mismo MAPE3 en ambas tablas permite comparar modelos sin cambiar la métrica de referencia.

La síntesis es clara, Titius-Bode domina en nueve de los diez cuerpos analizados si se consideran simultáneamente perihelio, distancia media y afelio, la única excepción es Plutón, pero ya se vio que esa ventaja no nace de un ajuste uniforme, sino de la forma muy abierta de su órbita y de la caída extrema del modelo clásico en el borde externo.

La paridad virtual en la Tierra es relevante porque fija el punto de calibración implícito del sistema áureo y al mismo tiempo, coincide con uno de los nodos más estables del modelo clásico, ese empate funciona como ancla metodológica y evita que la comparación quede sesgada desde el punto de partida.

Júpiter, Saturno y Urano son los casos donde la diferencia entre modelos se vuelve más drástica, ahí el esquema áureo fijo queda muy corto, mientras que Titius-Bode mantiene errores moderados, lo cual sugiere que el crecimiento de la secuencia de Fibonacci usada sin reindexación no acompaña la expansión real del sistema medio y externo.

Neptuno merece una lectura aparte, porque ambos modelos muestran deterioro, aunque el clásico todavía queda por delante, esto sugiere que el problema no es solo elegir entre dos secuencias, sino reconocer que la zona exterior puede obedecer a una organización distinta o a una historia dinámica menos compatible con reglas simples de progresión.

Este comportamiento por tramos no es extraño dentro de la literatura reciente sobre arquitecturas planetarias, donde la regularidad suele aparecer como propiedad local o intra-sistema y no necesariamente como una regla homogénea aplicada de manera idéntica a todas las regiones orbitales, los estudios de espaciamiento en sistemas múltiples muestran precisamente que puede haber similitud interna sin uniformidad global perfecta. Por eso, la lectura más razonable de la tabla comparativa no es que uno de los dos modelos “demuestre” el orden definitivo del sistema solar, lo que muestra, en realidad, es que el sistema contiene zonas donde una regla empírica clásica funciona mejor y otras donde esa misma regla pierde consistencia, dejando espacio para reinterpretaciones parciales. La quinta tabla examina el problema desde la perspectiva del espaciamiento consecutivo, usando diferencias en AU, cocientes de crecimiento, logaritmos de razón y curvatura del salto orbital, este cambio de escala es importante porque a veces un modelo falla en las distancias absolutas, pero conserva cierta coherencia en la forma en que crecen los intervalos entre órbitas vecinas.

Tabla 5
Espaciamiento orbital consecutivo y estructura de crecimiento

Tramo	Gap observado (AU)	Gap Titius-Bode (AU)	Gap áureo (AU)	R observado	R Titius-Bode	R áureo	ΔR TB (%)	ΔR áureo (%)	$\ln(R$ observado)	Curvatura del gap (AU)
Mercurio-Venus	0.336	0.300	0.333	1.869	1.750	2.000	-6.347	7.032	0.625	—
Venus-Tierra	0.277	0.300	0.333	1.382	1.429	1.500	3.333	8.500	0.324	-0.060
Tierra-Marte	0.524	0.600	0.667	1.524	1.600	1.667	5.007	9.382	0.421	0.247
Marte-Ceres	1.242	1.200	1.000	1.815	1.750	1.600	-3.591	-11.854	0.596	0.718
Ceres-Júpiter	2.437	2.400	1.667	1.881	1.857	1.625	-1.276	-13.617	0.632	1.195

Tramo	Gap observado (AU)	Gap Titius-Bode (AU)	Gap áureo (AU)	R observado	R Titius-Bode	R áureo	ΔR TB (%)	ΔR áureo (%)	$\ln(R)$ observado	Curvatura del gap (AU)
Júpiter-Saturno	4.334	4.800	2.667	1.833	1.923	1.615	4.913	-11.873	0.606	1.897
Saturno-Urano	9.652	9.600	4.333	2.012	1.960	1.619	-2.587	-19.533	0.699	5.318
Urano-Neptuno	10.881	19.200	7.000	1.567	1.980	1.618	26.327	3.230	0.449	1.229
Neptuno-Plutón	9.412	38.400	11.333	1.313	1.990	1.618	51.537	23.242	0.272	-1.469

Nota. Elaboración propia. RRR representa el cociente entre distancias medias consecutivas, mientras que la curvatura del gap es la diferencia entre el salto orbital actual y el salto orbital inmediatamente anterior. Esta tabla se apoya en los mismos semiejes mayores observados usados en el resto de la sección.

La lectura por razones consecutivas confirma que el sistema no crece con una sola razón estable, el paso Mercurio-Venus es muy distinto del tramo Venus-Tierra, luego el crecimiento vuelve a subir hacia Marte-Ceres y se acelera con fuerza hasta Saturno-Urano, antes de desacelerarse otra vez en la periferia.

Titius-Bode reproduce con bastante precisión los tramos medios, especialmente desde Marte hasta Urano, donde las diferencias porcentuales de razón son moderadas, eso explica por qué la regla clásica parece más convincente cuando se observa la arquitectura local del sistema medio que cuando se la empuja hacia el borde más externo.

El modelo áureo fijo se comporta peor en casi todos los tramos centrales, porque sus gaps crecen más lentamente de lo que exige la transición entre Ceres, Júpiter, Saturno y Urano, sin embargo, mejora relativamente en el paso Urano-Neptuno, donde el error de razón cae de manera visible frente al esquema clásico.

La curvatura del gap muestra un quiebre estructural claro, el mayor salto de aceleración aparece entre Júpiter-Saturno y Saturno-Urano, esa zona parece funcionar como frontera de régimen, lo que da sentido a la hipótesis de que la parte externa no debería modelarse como mera prolongación lineal del patrón interno.

Esta idea es coherente con investigaciones recientes sobre espaciamiento y arquitectura de sistemas planetarios, donde se observa regularidad dentro de ciertos subconjuntos orbitales, pero también transiciones en compactación y estabilidad cuando cambian la masa, el entorno dinámico o la vecindad resonante, la regularidad existe, sí, pero no suele comportarse como una regla escolar perfecta, porque el universo no trabaja para simplificar exámenes.

En consecuencia, la tabla de espaciamiento respalda una interpretación por tramos, el modelo clásico domina la mayor parte del crecimiento consecutivo hasta Urano, mientras que el esquema áureo conserva una pista interesante en el sector Urano-Neptuno y, de manera más débil, hacia Plutón, lo que justifica probar una reindexación del tramo externo.

La sexta tabla ensaya precisamente esa reindexación del sector externo, introduciendo un nodo áureo vacante entre Saturno y Urano, la lógica es sencilla aunque incómoda, si el modelo fijo queda corto desde Saturno en adelante, entonces puede evaluarse si una secuencia desplazada mejora el ajuste de Urano y Neptuno sin necesidad de alterar el patrón interno.

Tabla 6
Reindexación áurea del sector externo con nodo vacante hipotético

Cuerpo	Nodo reassignado	AU teórica	Nodo áureo (10 ⁶ km)	Distancia observada (10 ⁶ km)	Residuo (%)	ICE (%)
Saturno	21	7.00	1047.19	1426.71	-26.60	73.40
Planeta X (hipotético)	34	11.33	1695.44	—	—	—
Urano	55	18.33	2742.63	2870.63	-4.46	95.54
Neptuno	89	29.67	4438.07	4498.39	-1.34	98.66
Plutón	144	48.00	7180.70	5906.44	21.57	78.43

Nota. Elaboración propia. ICE es un índice descriptivo de compatibilidad externa calculado como $100 - |\text{residuo\%}|100 - |\text{residuo\%}|$. La fila “Planeta X” representa exclusivamente un nodo matemático vacante dentro del modelo reindexado y no debe interpretarse como evidencia observacional de un cuerpo confirmado.

La reindexación mejora de forma notable el ajuste de Urano y Neptuno. Urano cae a un error menor de 5% y Neptuno baja a poco más de 1%, lo que contrasta de manera fuerte con la subestimación extrema del modelo áureo fijo en la tabla 2.

Saturno no mejora, y eso también importa, la hipótesis del nodo vacante no corrige el tramo inmediatamente anterior, de modo que la reindexación parece útil solo a partir del sistema trans-saturnino y no como reparación total de la secuencia.

Plutón conserva un comportamiento ambiguo, porque el nodo 144 sobreestima con claridad su distancia media, esto indica que la reindexación externa favorece mejor a Urano y Neptuno que a Plutón, lo cual es consistente con la idea de que Plutón pertenece a un régimen orbital mucho más excéntrico y dinámicamente singular.

El nodo vacante etiquetado como “Planeta X” debe tratarse con mucha prudencia, lo que la tabla muestra es una posición matemática disponible dentro de una secuencia reordenada, no la detección de un planeta real ni una predicción astronómica cerrada.

Aun así, el resultado no es trivial, porque revela que la peor debilidad del modelo áureo fijo no estaba necesariamente en la razón de crecimiento, sino en la indexación continua

de los cuerpos externos, cuando se libera un nodo intermedio, la secuencia recupera capacidad descriptiva en dos de los tres cuerpos externos comparados.

La discusión global de esta tabla lleva a una conclusión prudente, el modelo áureo no supera a Titius-Bode como descripción general del sistema completo, pero sí abre una vía interpretativa interesante para el sector externo cuando se admite discontinuidad en la ocupación de nodos, eso no prueba una ley orbital nueva, pero sí muestra que la arquitectura observada puede ser más compatible con una secuencia incompleta que con una secuencia rígida y totalmente llena.

En conjunto, las seis tablas sostienen una lectura escalonada del sistema analizado, Titius-Bode ofrece el mejor ajuste agregado en casi todo el recorrido desde Venus hasta Urano, mientras que la secuencia áurea solo adquiere interés competitivo en el borde externo cuando se la reindexa y se permite un nodo vacante.

La discusión también muestra que no conviene confundir armonía numérica con explicación física, el valor principal del modelo áureo, al menos en esta investigación, es heurístico y comparativo, porque ayuda a detectar simetrías parciales, quiebres de régimen y posibles zonas de reorganización matemática, pero no sustituye la dinámica orbital real ni la historia de formación del sistema solar.

Conclusiones

El estudio permitió analizar la distribución orbital de algunos planetas del sistema solar mediante una secuencia basada en la proporción áurea, y al comparar los valores observados con los valores teóricos se encontró que sí existen aproximaciones parciales en ciertos cuerpos, sobre todo en la zona interna y en parte del sector externo cuando se ensaya una reindexación, sin embargo el ajuste no fue uniforme en todo el sistema, por lo que el objetivo general se cumplió desde una perspectiva exploratoria y comparativa. En relación con el objetivo de contrastar el modelo áureo con la ley de Titius-Bode, los resultados mostraron que la regla clásica ofreció un mejor comportamiento global en la mayor parte de los planetas analizados, especialmente desde Venus hasta Urano, mientras que el modelo áureo fijo presentó mayores desviaciones en los planetas gigantes, esto permite concluir que la proporción áurea no supera al modelo histórico como explicación descriptiva del conjunto completo, aunque sí aporta una lectura alternativa interesante en ciertos tramos.

Respecto al análisis de perihelio, afelio y distancia media, se comprobó que estas variables fueron útiles para evaluar la cercanía real entre las órbitas observadas y las secuencias matemáticas propuestas, ya que no bastaba con revisar una sola distancia puntual, sino que era necesario considerar el espesor orbital y la forma de cada trayectoria, de este modo se logró una valoración más rigurosa del ajuste y se evitó interpretar como exacto lo que en realidad solo era una coincidencia parcial.

La hipótesis de trabajo planteaba que algunas distancias planetarias podían mostrar una aproximación parcial a una distribución asociada con la proporción áurea, sin que ello implicara la existencia de una ley universal, y los resultados obtenidos respaldan esa idea, porque se identificaron coincidencias numéricas relevantes en algunos casos, pero

también desviaciones amplias en otros, por tanto la hipótesis fue aceptada de manera parcial, dentro del carácter exploratorio que definió toda la investigación.

La principal conclusión del estudio es que la proporción áurea puede funcionar como una herramienta matemática de análisis para interpretar ciertas regularidades orbitales, pero no como una explicación definitiva de la organización del sistema solar, su mayor valor está en abrir una vía de observación comparativa entre modelos, en mostrar que el sistema presenta zonas con distinto grado de ajuste, y en dejar claro que las regularidades numéricas deben ser examinadas con prudencia antes de atribuirles alcance físico general.

Recomendaciones

Se recomienda que futuras investigaciones amplíen la base de análisis incorporando no solo a los ocho planetas principales, sino también a planetas enanos, asteroides relevantes y objetos transneptunianos, porque una muestra más extensa permitiría comprobar si los patrones observados en este trabajo se mantienen, se debilitan o se transforman al incluir cuerpos con comportamientos orbitales diferentes, lo cual daría una visión más completa de la arquitectura del sistema solar.

También es conveniente que en estudios posteriores se apliquen pruebas estadísticas más avanzadas para medir el nivel de ajuste entre datos observados y modelos teóricos, ya que el uso de errores porcentuales y comparaciones descriptivas ofrece una base útil, pero puede fortalecerse con técnicas de validación matemática más exigentes, de manera que el análisis no dependa solo de la proximidad visual o de coincidencias puntuales entre algunos valores.

Se recomienda además contrastar la secuencia áurea no solo con la ley de Titius-Bode, sino con otros modelos de distribución orbital y con enfoques dinámicos de formación planetaria, porque esa comparación permitiría distinguir mejor entre un patrón numérico

atractivo y una explicación con mayor respaldo físico, así se evitaría presentar como ley general una relación que quizá solo funciona como recurso descriptivo dentro de ciertos límites.

Otra recomendación importante es trabajar siempre con bases de datos astronómicas oficiales y con procedimientos de cálculo claramente documentados, porque la confiabilidad del estudio depende tanto de la calidad de los datos como de la transparencia metodológica, por ello resulta necesario conservar tablas, fórmulas, scripts y hojas de cálculo que permitan revisar cada operación y repetir el análisis en condiciones semejantes.

Se recomienda que la posible existencia de nodos vacantes o posiciones teóricas no ocupadas sea tratada con mucha cautela, porque estas proyecciones pueden ser útiles como hipótesis matemáticas de exploración, pero no deben confundirse con evidencia astronómica confirmada, en consecuencia cualquier referencia a un planeta adicional o a una estructura orbital incompleta debe presentarse como una propuesta abierta a verificación futura y no como una conclusión cerrada.

Referencias Bibliográficas

Bashi, D., & Zucker, S. (2021). Quantificación de la similitud de las arquitecturas de sistemas planetarios. *Astronomy & Astrophysics*, 651, A61.

<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202140699>

Britannica, Encyclopaedia. (2024). *Sistema solar*. Encyclopaedia Britannica.

<https://www.britannica.com/science/solar-system>

Capili, B. (2021). Estudios transversales. *American Journal of Nursing*, 121(10), 59–62.

<https://doi.org/10.1097/01.NAJ.0000794280.73744.fe>

- Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Diseño de investigación: enfoques cualitativos, cuantitativos y mixtos* (5.ª ed.). SAGE Publications.
- Danchev, V. (2022). Ciencia de datos reproducible con Python: un recurso educativo abierto. *Journal of Open Source Education*, 5(56), 156.
<https://doi.org/10.21105/jose.00156>
- Howe, A. R., Becker, J. C., Stark, C. C., & Adams, F. C. (2025). Clasificación de la arquitectura de sistemas planetarios extrasolares. *The Astronomical Journal*, 169(3), 149. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/adabdb>
- Hughes, S. (2024). Una nueva mirada a las órbitas. *Physics Education*, 59(2), 023002.
<https://doi.org/10.1088/1361-6552/ad1b21>
- Jet Propulsion Laboratory. (2024). *Development Ephemeris (DE): modelos de efemérides planetarias del sistema solar*. California Institute of Technology / NASA. https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph_export.html
- Krommydas, D., & Scardigli, F. (2025). Relación exponencial de distancias (regla de Titius-Bode) en sistemas planetarios extrasolares. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 538(4), 2730–2743. <https://doi.org/10.1093/mnras/staf405>
- McInerney, P., Ajith, A., Pretorius, D., & Mabizela, S. E. (2024). Consideraciones para elegir un diseño de investigación. *Wits Journal of Clinical Medicine*, 6(3), 171–174. <https://doi.org/10.18772/26180197.2024.v6n3a11>
- Mishra, L., Alibert, Y., Udry, S., & Mordasini, C. (2023). Un marco para la arquitectura de los sistemas exoplanetarios: cuatro clases de arquitectura de sistemas planetarios. *Astronomy & Astrophysics*, 670, A68. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202243751>

- Moiseev, Y. A., & Emelyanov, N. V. (2024). Teorías de efemérides JPL DE, INPOP y EPM. *Astronomy Reports*, 68(11), 1098–1118.
<https://doi.org/10.1134/S1063772924700938>
- Muresan, A., Persson, C. M., & Fridlund, M. (2024). Diversidades y similitudes en sistemas multiplanetarios y sus arquitecturas: espaciamento orbital. *Astronomy & Astrophysics*, 692, A122. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202451353>
- Murray, C. D., & Dermott, S. F. (1999). *Dinámica del sistema solar*. Princeton University Press.
- NASA. (2024). *Exploración del sistema solar: datos y características de los planetas*. National Aeronautics and Space Administration. <https://solarsystem.nasa.gov>
- Otegi, J. F., Helled, R., & Bouchy, F. (2022). La similitud de los sistemas multiplanetarios. *Astronomy & Astrophysics*, 658, A107.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202142110>
- Petit, A. C. (2024). Estabilidad a largo plazo y espaciamento dinámico de sistemas planetarios compactos. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 18(S382), 20–29. <https://doi.org/10.1017/S1743921323004167>
- Wünsch, M., Herrmann, M., Noltenius, E., Mohr, M., Morris, T. P., & Boulesteix, A.-L. (2025). Replanteamiento del manejo del fracaso metodológico en estudios comparativos. *Statistics in Medicine*, 44(23–24), e70257.
<https://doi.org/10.1002/sim.70257>
- Zelenka, N., Di Cara, N. H., Bennet, E., Clatworthy, P., Day, H., Garcia, I. K., Garcia, S. R., Hanschke, V. A., & Kuwertz, E. S. (2025). Riesgos de datos: un vocabulario abierto de riesgos éticos para proyectos intensivos en datos. *Journal of Responsible Technology*, 21, 100110.
<https://doi.org/10.1016/j.jrt.2025.100110>

Anexos

